Limites : Exercices

Exercice 1 : Notions intuitives

Dans la figure ci-contre, vers quoi tend $f(x)$ lorsque x tend vers :

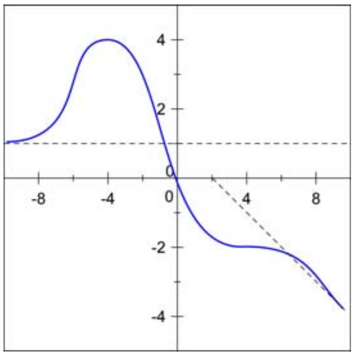
a) $-\infty$

b) $+\infty$

c) 0

d) -4

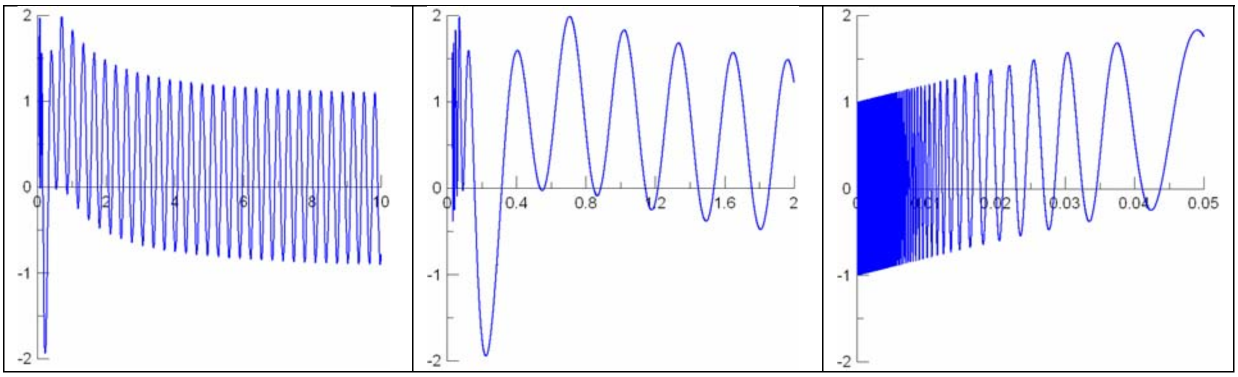
e) 4



Exercice 2 : Notions intuitives

Vers quelle valeur tend la fonction ci-dessous :	lorsque x tend vers :
$f_1(x) = x - 1$	$0\ ;\ 2\ ;\ 5$
$f_2(x) = x^2 + 5x + 1$	$-3\ ;\ 0\ ;\ +\infty$
$f_3(x) = \dfrac{1}{x-1}$	$0\ ;\ 1\ ;\ +\infty$
$f_4(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$	$0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ +\infty$
$f_5(x) = \cos(x) + \sin(x)$	$0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\ ;\ \pi\ ;\ +\infty$
$f_6(x) = \ln(1 + x)$	$-1\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ +\infty$
$f_7(x) = e^x$	$-\infty\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ +\infty$

Exercice 3 : Notions intuitives



La fonction $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) + \sin(20x)$ possède-t-elle des limites en 0; 1; $+\infty$? (représentations graphiques ci-dessus)

Exercice 4 : Définitions

Que signifient les limites suivantes ? Sont-elles exactes ? Si non, quelle est l'expression exacte ? Peut-on les prouver ?

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x-2}{x+1} = 3$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-2x+1 = +\infty$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{2x} = 0$

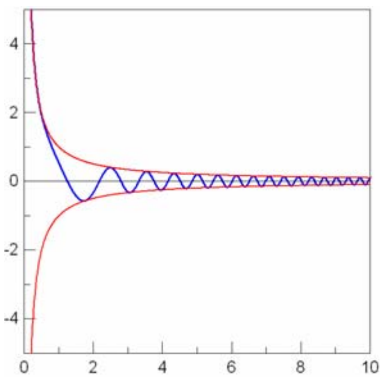
Exercice 5 : Calcul pratique

Calculer les limites suivantes, si elles existent (le cas échéant, préciser la limite à droite et à gauche). Choisir la bonne technique…

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x-2}{3x+1}$	i) $\lim\limits_{x\to 2} \sin(x-2)$	q) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{2x}$
b) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2-2x+1$	j) $\lim\limits_{x\to 0} (x-2)\sin x$	r) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}$
c) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^5+129874553x^2+0.05$	k) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-2)\sin x$	s) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x-2)\sin x}{3x^2+2}$
d) $\lim\limits_{x\to 0} 38x^4-25x^3+1$	l) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x-2}$	t) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x\sin(x-2)}{x-2}$
e) $\lim\limits_{x\to 1} x^2-2x+1$	m) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sin x}{x-2}$	u) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{x\sin x}{x-\pi}$
f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{x^3-3x^2+3x-1}$	n) $\lim\limits_{x\to 0} \left(x^3+2\sqrt{x}+1\right)\cos\dfrac{1}{x}$	v) a étant un réel : $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\left(x^2+(1-a)x-a\right)\cos\left(\sqrt{x}\right)}{x-a}$
g) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5x^2-x+50}{2x^5+5x^2}$	o) $\lim\limits_{x\to 0} \left(x^3+2\sqrt{x}\right)\cos\dfrac{1}{x}$	w) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin x-\tan x}{\sin x+\tan x}$
h) $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{8x^2-2x+1}{8x+1}$	p) $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos(x\sin x)$	x) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{x^2\sin x}{x^2-\pi^2}$

Exercice 6 : Calcul pratique ()

La fonction $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{\cos\left(x^2\right)}{x} \end{array}$ admet-elle une limite en 0 ? Et en $+\infty$? Le démontrer



Exercice 7 : Calcul pratique (comparaisons)

Soient l un réel strictement positif, et u une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=l$.

1) Justifier qu'il existe au moins un intervalle I dans lequel $u(x)\geq 0$

2) Soit f la fonction définie sur I par $f(x)=\sqrt{u(x)}$.

a) Monter par la technique de la quantité conjuguée que $\left|f(x)-\sqrt{l}\right|\leq\dfrac{|u(x)-l|}{\sqrt{l}}$

b) En déduire la limite de f en $+\infty$.

3) Applications :

Déterminer les limites en $+\infty$ des fonctions $f(x)=\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}$ et $g(x)=\sqrt{\dfrac{3x+1}{x-2}}$

Exercice 8 : Calcul pratique

Calculer les limites suivantes, si elles existent :

a) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}$; b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+\dfrac{1}{x}-2}{x-1}$; c) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x\sqrt{x}-8}{4-x}$; d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x(x+1)}-\dfrac{1}{x}$

Exercice 9 : logarithmes, exponentielles et fonctions composées

Calculer les limites suivantes, si elles existent :

a) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}$, $a=0$; $+\infty$	b) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{x}+x$, $a=0$; 1 ; $+\infty$	c) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x-3}{2x+5}$, $a=-\dfrac{5}{2}$; $-\infty$
d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x-x$	e) $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x^2-3x+8}$; $a=+\infty$; $-\infty$	f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(x^2\right)}{x}$
g) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(1+h)}{h}$	h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{5x}$	i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+2x^2+3x\right)}{x^3}$
j) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{\sin x}$	k) $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{\ln x}$; $a=1$; $+\infty$	l) $\lim\limits_{x\to a}\ln\left(\sqrt{x}\right)$; $a=0$; $+\infty$
m) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$	n) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\right)$	o) $\lim\limits_{x\to a}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$; $a=-\infty$; $+\infty$

Exercice 10 : Asymptotes

Soit f la fonctions définie par $f_1(x) = \dfrac{2x^2 + 3x - 1}{x+2}$.

1) Quel est son intervalle de définition D_{f1}?

2) Montrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que pour tout x de D_{f1}, $f_1(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+2}$.

3) Etudier le comportement de f_1 en $-\infty$ et $+\infty$.

4) Mêmes questions avec les fonctions f_2 et f_3 définies respectivement par : $f_2(x) = \dfrac{3x+5}{x+2}$ et $f_3(x) = \dfrac{3x-6}{x^2-4}$

5) Peut-on appliquer le même raisonnement aux fonctions :

$g(x) = \dfrac{-3\sin^2(x) + 8\cos(x) + 2}{\cos(x) + 2}$; $h(x) = \dfrac{3e^{2x} + 8e^x + 5}{e^x + 2}$; $i(x) = \dfrac{2e^x + 5}{e^x + 2}$

Exercice 11 : Asymptotes

Montrer que la droite d'équation $y = x$ est asymptote en $+\infty$ et en $-\infty$ à la courbe représentative de la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$

Exercice 12 : Asymptotes

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + \sqrt{1+x^2}$ et C_f sa représentation graphique.

1) Montrer que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à C_f en $-\infty$.

2) Montrer que la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote à C_f en $+\infty$.

Exercice 13 : Un peu de géométrie

Soient C la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto 2\sqrt{x}$ sur $[0;+\infty[$ et A le point de C d'abscisse 1. A tout réel $x \geq 0$ différent de 1 on associe le point de C d'abscisse x, que l'on note M_x, et on désigne par $m(x)$ le coefficient directeur de la droite (AM_x).

1) Quelles sont les coordonnées de A et de M_x (pour $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$) ?

2) Quelles conjectures le graphique permet-il de faire sur la fonction m ? (monotonie, encadrement, limites…)

3) Expliciter $m(x)$; étudier les variations de la fonction m et sa limite en $+\infty$.

4) Calculer la limite de $m(x)$ lorsque x tend vers 1. Quelle interprétation graphique peut-on donner de ce résultat ?

Exercice14 : Calcul pratique – Continuité

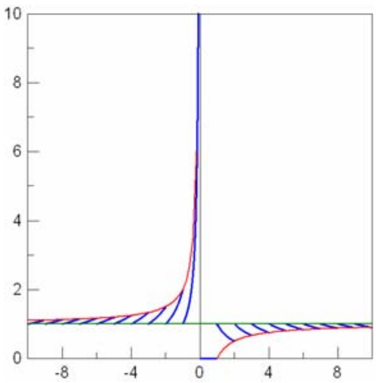
On appelle $E(x)$ la fonction « partie entière » définie sur $\mathbb{R}$.

1) Etudier la continuité de la fonction $f(x)=\frac{E(x)}{x}$.

2) f a-t-elle des limites aux points suivants :
$-\infty$; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; $+\infty$? Le cas échant les calculer et justifier.

3) Peut-on prolonger f par continuité en 0 ?

Rappel : la partie entière E(x) d'un réel x est le plus grand entier inférieur ou égal à x. On a :
$x-1<E(x)\le x$, ou : $E(x)\le x<E(x)+1$.



Exercice 15 : Petit problème

Soit f la fonction définie par : $f(x)=x+\ln\frac{x-2}{x+2}$

1) Quel est son ensemble de définition ? Montrer que f est impaire et étudier ses variations. Trouver ses limites aux points intéressants.
2) Soit C la représentation graphique de f. Etudier les asymptotes de C. Montrer en particulier que C admet une asymptote oblique Δ en $+\infty$, et donner l'équation de Δ.
3) Représenter graphiquement C.

Exercice 16 : Gros problème

On cherche à étudier la fonction f définie par $f(x)=\frac{1}{x}\left(x^2+1-\ln(x)\right)$ sur $]0;+\infty[$.

1) Etudier les variations de la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=x^2+\ln x-2$, ses limites en 0 et $+\infty$. En déduire que l'équation $g(x)=0$ admet une seule solution α, et que $1{,}30\le\alpha\le1{,}35$. Etudier le signe de g.

2) Etudier les limites de f en 0 et $+\infty$. Etudier f' à l'aide de g et en déduire les variations de f.

3) Soit C la représentation graphique de f. Montrer que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote à C en $+\infty$. Déterminer le point d'intersection B de C et Δ. Déterminer la position de C par rapport à Δ.

Exercice 17 : Dernier problème…

Soit f la fonction telle que $f(x)=xE\left(\frac{1}{x}\right)$, ou E désigne la fonction « partie entière ».

1) Représenter graphiquement f dans un repère orthonormal.
2) a) Montrer que pour tout réel x strictement positif, $0\le 1-f(x)\le x$
   b) Trouver un encadrement de $1-f(x)$ valable pour tout x strictement négatif.
   c) Quelle est la limite de f en 0 ?
3) Considérons le prolongement par continuité g de f sur $\mathbb{R}$. On cherche la limite en zéro de $\varphi(x)=\frac{g(x)-g(0)}{x}$. En raisonnant par l'absurde, montrer qu'aucun nombre réel l n'est la limite de φ en 0. En déduire que g n'est pas dérivable en 0.