AMERINSA

École d'Été AMERINSA

BASES DE MATHEMATIQUES:

Limites, Dérivation

Laurent GREMILLARD

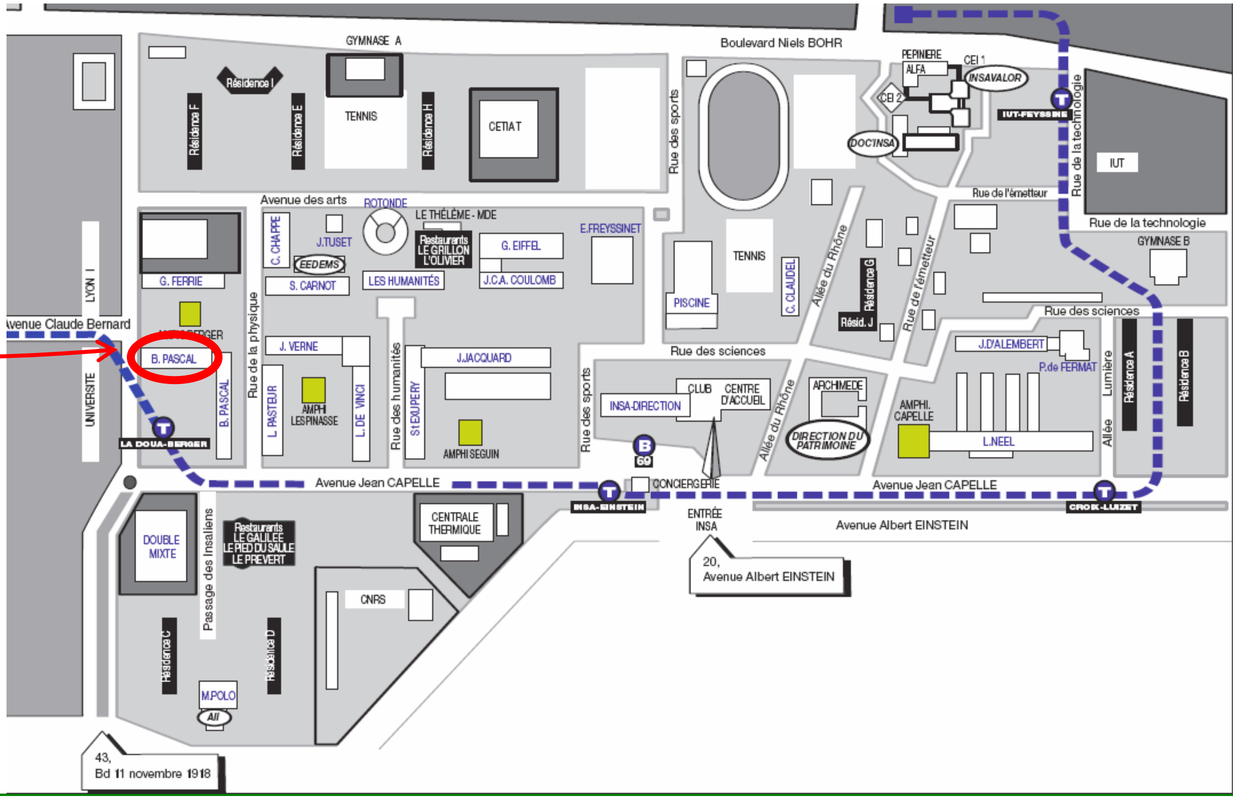
Chercheur CNRS

Bat. Blaise Pascal, 5e étage

laurent.gremillard@insa-lyon.fr

Laboratoire MATEIS

04-72-43-81-52



Plan du cours

- Limites
  - A- Notion intuitive
  - B- Définition
  - C- Calcul pratique
  - D- Limite à gauche, limite à droite
  - E- (Comportement asymptotique)
  - F- (Continuité)
- Dérivation
  - A- Le nombre dérivé
  - B- Interprétation géométrique
  - C- La fonction dérivée
  - D- Quelques dérivées usuelles

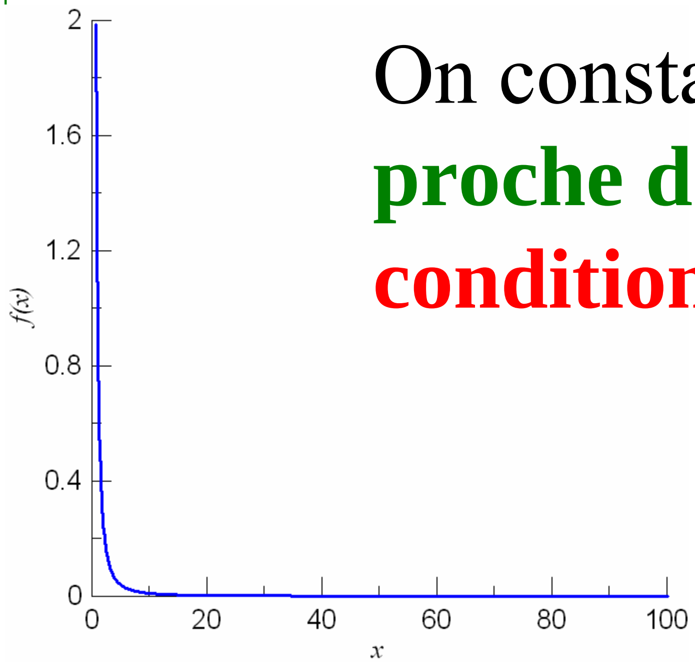
A- Limites: Notion intuitive

Considérons la fonction *f* :

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{x^2} \end{array}$$

Calculons la valeur de *f*(x) quand x prend des valeurs de plus en plus grandes:

x	0,5	1	10	50	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000
f(x)	4	1	0,01	4.10^{-4}	10^{-4}	10^{-6}	10^{-8}	10^{-10}	10^{-12}



On constate qu'**on peut rendre *f*(*x*) aussi proche de 0 que l'on veut à la seule condition de prendre *x* assez grand.**

On dit que :

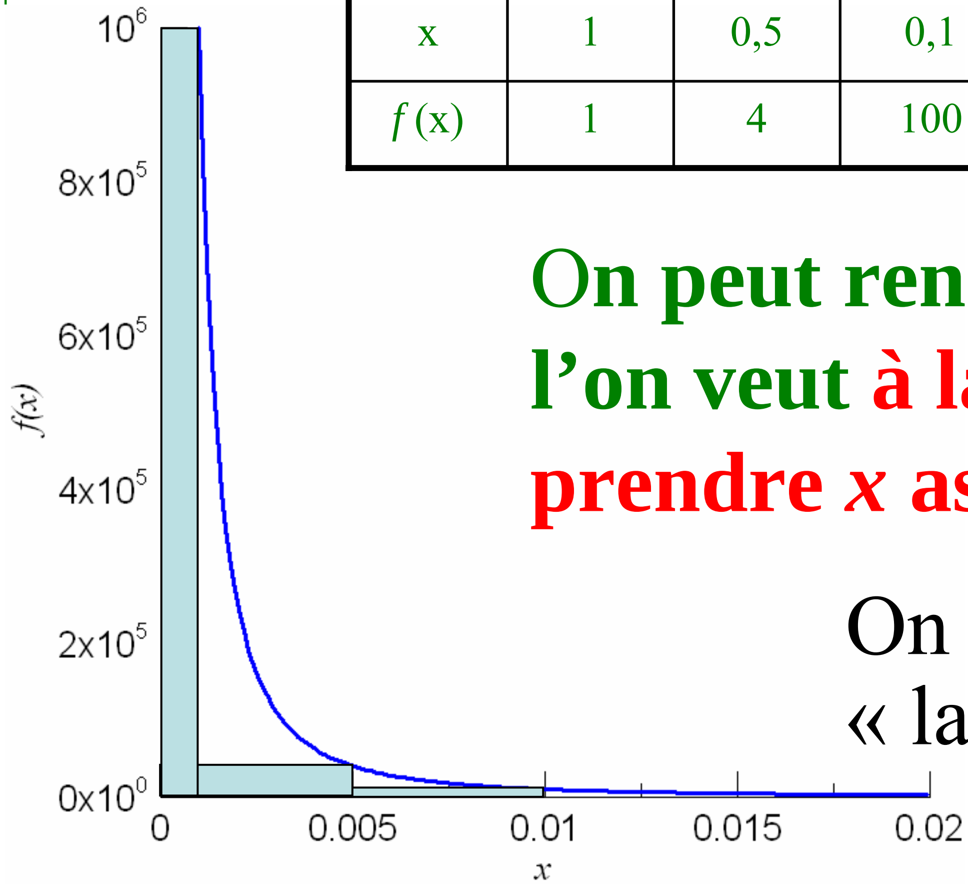
« la limite de *f* en **+∞** est **0** »

A- Limites: Notion intuitive

Considérons toujours la fonction f : $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{x^2} \end{array}$

Calculons la valeur de f (x) quand x prend des valeurs de plus en plus proches de **0** :

x	1	0,5	0,1	0,01	0.005	0,001
f (x)	1	4	100	10 000	4.10^4	10^6



On peut rendre *f (x)* aussi grand que l'on veut à la seule condition de prendre *x* assez proche de zéro.

On dit que :

« la limite de f en **0** est $+\infty$ »

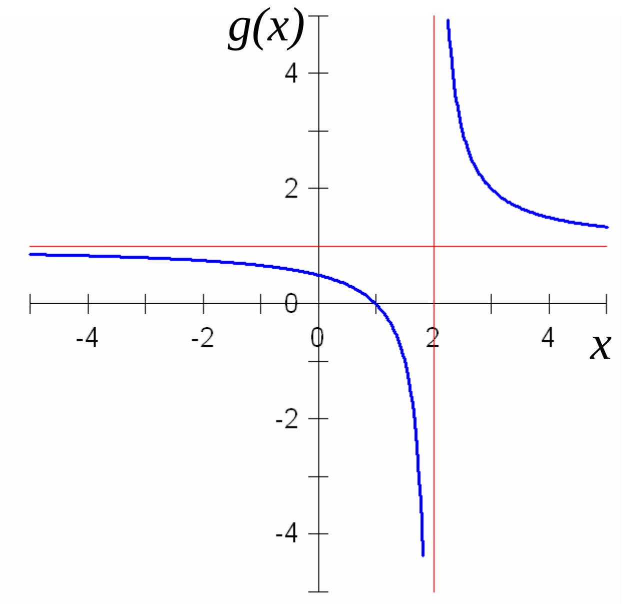
A- Limites: Notion intuitive

Considérons maintenant la fonction g :

$$g : \begin{array}{l} \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{x-1}{x-2} \end{array}$$

Calculons la valeur de g (x) quand x prend des valeurs de plus en plus proches de 2 :

x	1	1,5	1,9	1,95	1,99	2	2,01	2,05	2,1	2,5	3
g (x)	-1	-2	-10	-20	-100	✖	100	20	10	2	1



si $x > 2$, alors

on peut rendre g (x) aussi grand et positif que l'on veut

à la seule condition de prendre x assez proche de 2.

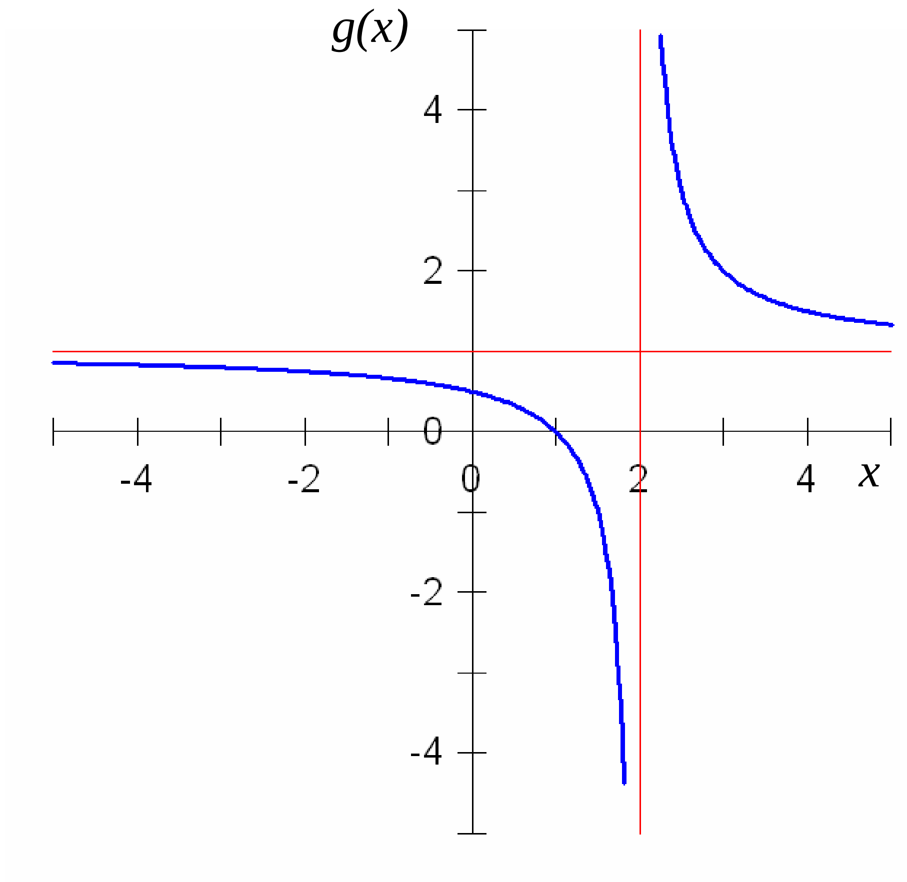
si $x < 2$, alors

on peut rendre g (x) aussi grand mais négatif que l'on veut

à la seule condition de prendre x assez proche de 2.

A- Limites: Notion intuitive

$$g : \begin{array}{l} \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{x-1}{x-2} \end{array}$$



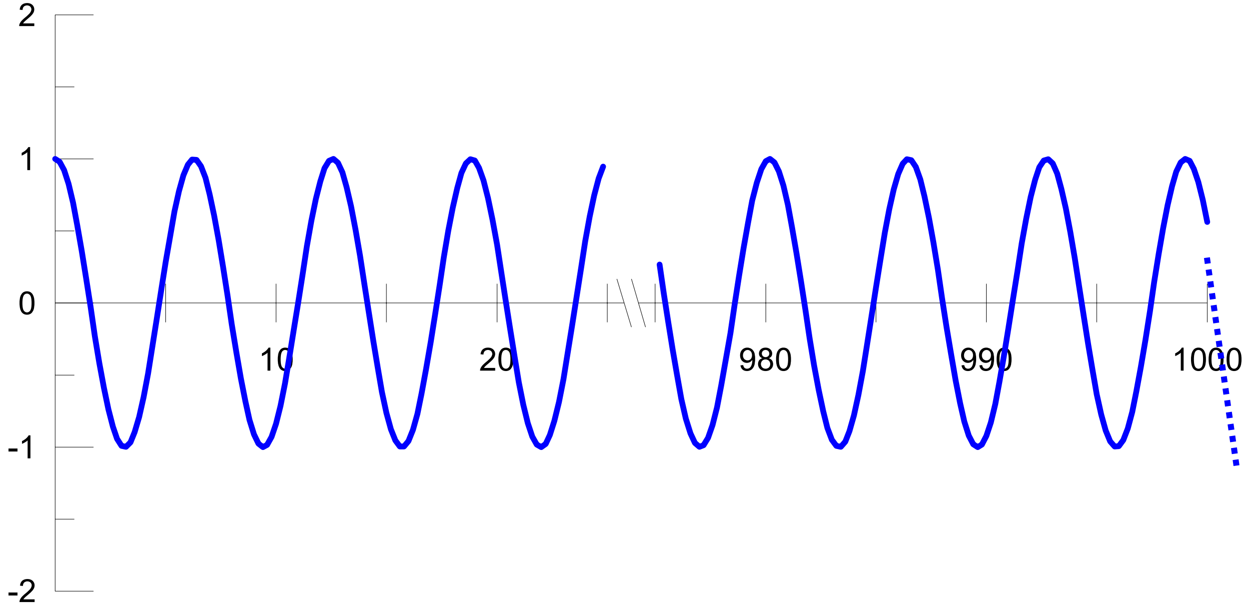
On dit que ***g* n'a pas de limite en 2**

En revanche,

- ***g* a une <u>limite à gauche</u> en 2** (c'est **-∞**)
- ***g* a une <u>limite à droite</u> en 2** (c'est **+∞**)

A- Limites: Notion intuitive

$$h : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \cos(x) \end{array}$$



Que peut-on dire de *h(x)* lorsque:

- *x* est de plus en plus grand ?
- *x* se rapproche de 0 ?

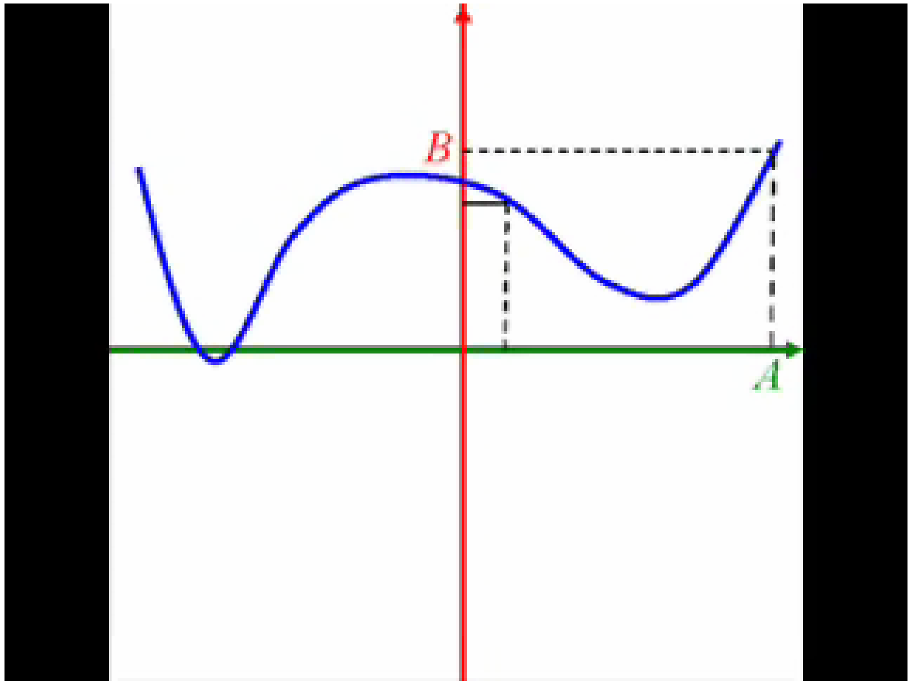
B- Limites: Définition

❑ Notation

$$\lim_{x \to A} f(x) = B$$

Signifie:

On peut rendre *f(x)* aussi proche de *B* que l'on veut à la seule condition de prendre *x* assez proche de *A*



avec $A, B \in \{\mathbb{R}, +\infty, -\infty\}$

1/ Limite d'une fonction en $+\infty$

Soit f une fonction définie au moins sur un intervalle du type [a ; $+\infty$[.

Si **à la seule condition de prendre *x* assez grand**,

On peut rendre le nombre $f(x)$:

- **aussi grand et positif que l'on veut**, on dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ et on note :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

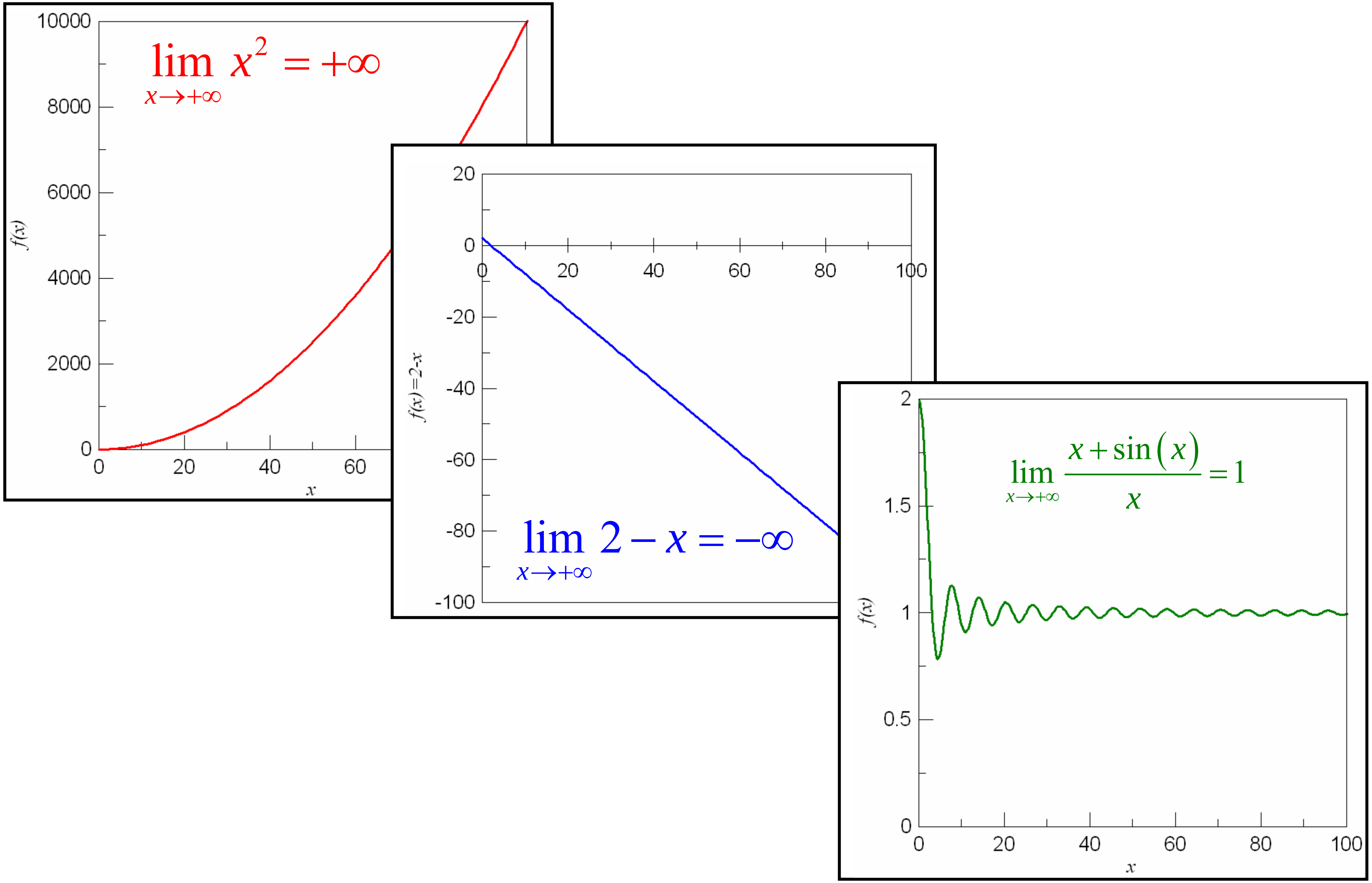
- **aussi grand en valeur absolue mais négatif que l'on veut**, on dit que f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ et on note :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

- **aussi proche d'un réel λ que l'on veut**, on dit que f a pour limite λ en $+\infty$ et on note :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lambda$$

- Limite d'une fonction en $+\infty$: exemples



2/ Limite d'une fonction en $-\infty$

Soit f une fonction définie au moins sur un intervalle du type $]-\infty\ ;\ a]$.

Si **à la seule condition de prendre x assez grand en valeur absolue mais NEGATIF**,

On peut rendre le nombre $f(x)$:

- **aussi grand et positif que l'on veut**, on dit que f a pour limite $+\infty$ en $-\infty$ et on note :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

- **aussi grand en valeur absolue mais négatif que l'on veut**,
on dit que f a pour limite $-\infty$ en $-\infty$ et on note :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

- **aussi proche d'un réel λ que l'on veut**,
on dit que f a pour limite λ en $-\infty$ et on note :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lambda$$

❑ 3/ Limite d'une fonction en un réel α

Soit f une fonction définie au moins sur un intervalle contenant α ou dont α est une borne.

Si **à la seule condition de prendre *x* assez proche de** α:

On peut rendre le nombre $f(x)$

- **aussi grand et positif que l'on veut**, on dit que f a pour limite $+\infty$ en α et on note :

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = +\infty$$

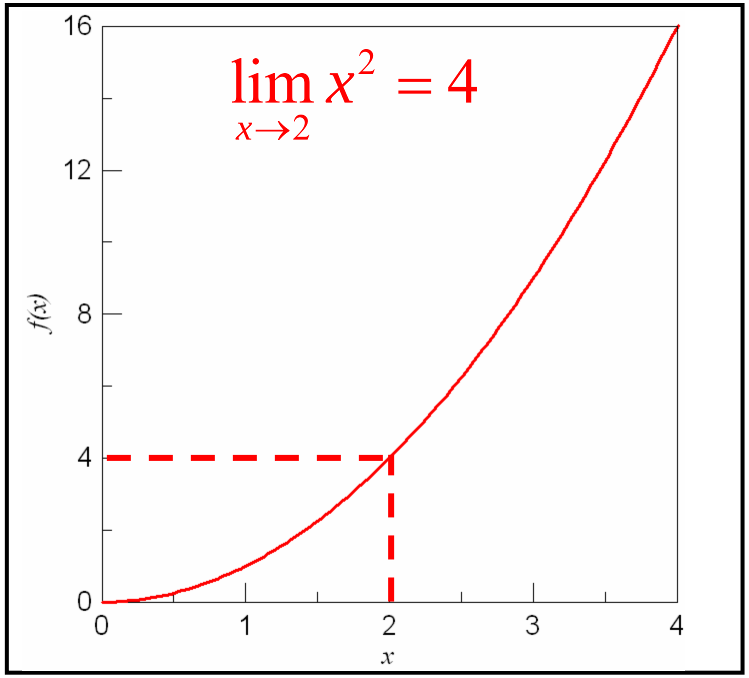
- **aussi grand en valeur absolue mais négatif que l'on veut**,
on dit que f a pour limite $-\infty$ en α et on note :

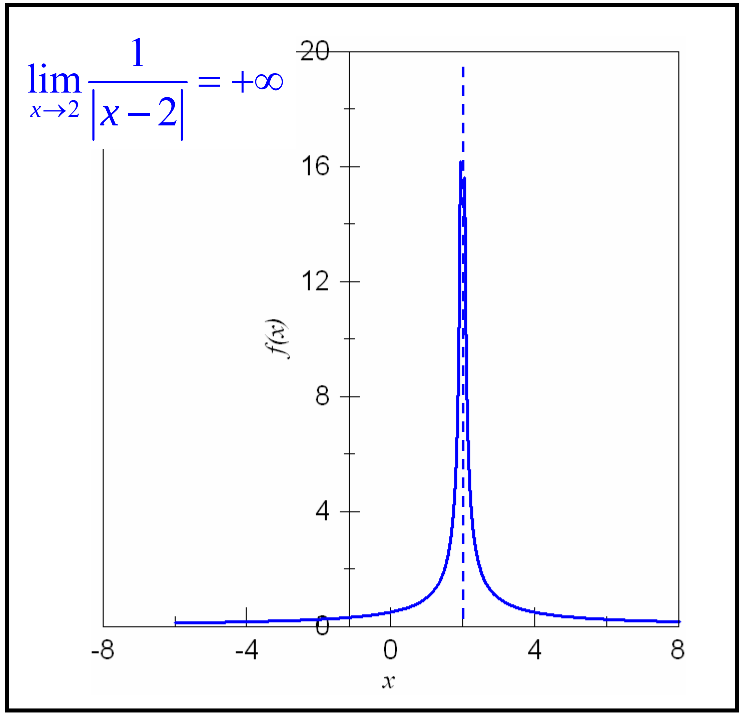
$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = -\infty$$

- **aussi proche d'un réel λ que l'on veut**,
on dit que f a pour limite λ en α et on note :

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = \lambda$$

❑ Limite d'une fonction en un réel α : exemples





❑ Remarque:

Soient f une fonction définie sur D et α un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Le calcul d'une limite de f en x_0 n'est étudié que si α est élément de D ou une borne de D.

Par exemple, nous n'étudierons pas la limite de la fonction : $x \mapsto \sqrt{x}$ en $\alpha = -1$…

C- Limites: calcul pratique

❑ 1/ Quelques limites usuelles

si : $f(x) = x; x^2; x^3; \sqrt{x}$ ou plus généralement : $f(x) = x^n$, avec n>0

alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

si : $f(x) = \frac{1}{x}; \frac{1}{x^2}; \frac{1}{x^3}; \frac{1}{\sqrt{x}}$ ou plus généralement : $f(x) = x^{-n}$, avec n>0

alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

si : $f(x) = x; x^2; x^3; \sqrt{x}$ ou plus généralement : $f(x) = x^n$, avec n>0

alors $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

$\lim_{x \to 0} \cos(x) = 1$ $\lim_{x \to 0} \sin(x) = 0$

2/ Opérations sur les limites :

2.a) somme

Les fonctions f et g ayant une limite (finie ou infinie), la fonction $f+g$ admet une limite dans chacun des cas décrits dans le tableau suivant :

lim g \ lim f	$+\infty$	$-\infty$	$\alpha\in\mathbb{R}$
$+\infty$	$+\infty$	**FI**	$+\infty$
$-\infty$	**FI**	$-\infty$	$-\infty$
$\beta\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$\alpha+\beta$

2/ Opérations sur les limites :

2.b) produit

Les fonctions f et g ayant une limite (finie ou infinie), la fonction $f \times g$ admet une limite dans chacun des cas décrits dans le tableau suivant :

$\lim g$ \ $\lim f$	$+\infty$	$-\infty$	$\alpha \in \mathbb{R}^{*+}$	$\alpha \in \mathbb{R}^{*-}$	0
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**FI**
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**FI**
$\beta \in \mathbb{R}^{*+}$	$+\infty$	$-\infty$	$\alpha \times \beta$	$\alpha \times \beta$	0
$\beta \in \mathbb{R}^{*-}$	$-\infty$	$+\infty$	$\alpha \times \beta$	$\alpha \times \beta$	0
0	**FI**	**FI**	0	0	0

2/ Opérations sur les limites :

2.c) quotient

Les fonctions f et g ayant une limite (finie ou infinie), la fonction f / g admet une limite dans chacun des cas décrits dans le tableau suivant :

$\lim g$ \ $\lim f$	$+\infty$	$-\infty$	$\alpha\in\mathbb{R}^{*+}$	$\alpha\in\mathbb{R}^{*-}$	0
$+\infty$	**FI**	**FI**	**0**	**0**	**0**
$-\infty$	**FI**	**FI**	**0**	**0**	**0**
$\beta\in\mathbb{R}^{*+}$	$+\infty$	$-\infty$	α/β	α/β	0
$\beta\in\mathbb{R}^{*-}$	$-\infty$	$+\infty$	α/β	α/β	0
0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	**FI**

Remarque : Si β=0, on peut conclure lorsque g garde un signe constant au voisinage du « point » où l'on cherche la limite :

si $g(x) > 0$, alors $\dfrac{1}{g(x)}$ tend vers $+\infty$; si $g(x)<0$, alors $\dfrac{1}{g(x)}$ tend vers $-\infty$

3/ Formes indéterminées

3.a) Introduction

Les situations marquées **FI** dans les tableaux sont appelées : **formes indéterminées**. Elles n'ont pas de sens en soit. On peut en rencontrer 4:

$+\infty-\infty$, $0\times\infty$, $\frac{0}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$.

Lorsqu'en étudiant une limite, on trouve une forme indéterminée, on ne peut pas déduire immédiatement le résultat. Il faut **lever l'indétermination**. Le résultat peut être un réel (0, 2, π, …), +∞, -∞, la limite peut ne pas exister…

Il existe deux autres formes indéterminées: 1^{∞} et 0^{0} , qui sont en fait de la forme $0\times\infty$.

Le calcul des formes indéterminées constitue la plus grande difficulté dans le calcul des limites

❑ Comment se débarrasser des formes indéterminées :

3.b) Factorisation du terme prépondérant

Exemple :

Considérons la fonction polynôme : $f(x) = 3x^5 + 2x^4 - 5x$

En $+\infty$, elle présente une indétermination de la forme $+\infty - \infty$.

Pour lever l'indétermination, on met en facteur le terme de plus haut degré: $3x^5$.

On a donc :

$$f(x) = 3x^5\left(1 + \frac{2x^4}{3x^5} - \frac{5x}{3x^5}\right) = 3x^5\left(1 + \frac{2}{3x} - \frac{5}{3x^4}\right)$$

Et on peut calculer facilement :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{2}{3x} - \frac{5}{3x^4}\right) = 1$$

On a donc la limite de f :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(3x^5 + 2x^4 - 5x\right) = +\infty$$

Comment se débarrasser des formes indéterminées :

3.b) Factorisation du terme prépondérant

Propriété 1 :
en $+\infty$ ou $-\infty$, tout polynôme a la même limite que son terme de plus haut degré.

Propriété 2 :
en $+\infty$ ou $-\infty$, toute fraction rationnelle a la même limite que le quotient simplifié des termes de plus haut degré

Exemple : $F(x)=\dfrac{5x^7+3x^2+3}{2x^3+2x}$

On raisonne comme dans le cas précédent : $F(x)=\dfrac{5x^7\left(1+\dfrac{3x^2}{5x^7}+\dfrac{3}{5x^7}\right)}{2x^3\left(1+\dfrac{2x}{2x^3}\right)}=\dfrac{5x^4}{2}\dfrac{\left(1+\dfrac{3}{5x^5}+\dfrac{3}{5x^7}\right)}{\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}$

On en déduit donc la limite de F(x) en $+\infty$ **:**

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^7}{2x^3}=+\infty$$

Attention: ces propriétés ne sont pas valables ailleurs qu'en $+\infty$ ou $-\infty$.

- Comment se débarrasser des formes indéterminées :

  3.b) Factorisation du terme prépondérant

Remarque :

Cette méthode est aussi applicable à d'autres fonctions que les polynômes ou fractions rationnelles. Généralement, le terme «prépondérant» d'une expression est «celui qui l'emporte» sur les autres (s'il existe), celui «qui donne la limite», les autres termes étant «négligeables » devant lui.

Lorsqu'un terme prépondérant apparaît lors de l'étude d'une limite de fonction, l'idée pour obtenir cette limite est de le mettre en facteur.

Remarque :

Le terme prépondérant en un point n'est pas forcément le terme prépondérant ailleurs.

par exemple: x l'emporte sur $\frac{1}{x}$ en $+\infty$, mais $\frac{1}{x}$ l'emporte sur x au voisinage de 0.

(notions développées rigoureusement (mathématiquement) dans le cours de première année)

Comment se débarrasser des formes indéterminées :

3.c) Utilisation de l'expression conjuguée

L'expression conjuguée de **(a+b)** est **(a-b)**.

Il est parfois possible de lever une indétermination en multipliant une expression tendant vers 0 par son expression conjuguée.

Exemple:
On cherche la limite quand x tend vers 0 de : $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x^3}$

C'est une forme indéterminée du type $\dfrac{0}{0}$

On va donc multiplier dénominateur et numérateur par l'expression conjuguée du numérateur:

$$f(x) = \frac{\left(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)}{x^3\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)} = \frac{1+x-1+x}{x^3\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)} = \frac{2}{x^2\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)}$$

$\rightarrow$ 0, >0

On en déduit: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$

❑ Comment se débarrasser des formes indéterminées :

3.d) Utilisation de la définition du nombre dérivé

On y reviendra dans le chapitre « Dérivation »

S'applique dans le cas d'une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$, si on reconnaît la limite en α du taux d'accroissement en α d'une fonction dérivable en α.

Exemple 1:

On cherche la limite en 0 de $f(x) = \frac{\cos(x)-1}{x}$

On peut écrire: $f(x) = \frac{\cos(x)-1}{x} = \frac{\cos(x)-\cos(0)}{x-0}$

Et on sait que (définition du nombre dérivé): $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos(x)-\cos(0)}{x-0} = \cos'(0) = -\sin(0) = 0$

Donc: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

❑ Comment se débarrasser des formes indéterminées :

3.d) Utilisation de la définition du nombre dérivé

On peut aussi faire apparaître un taux d'accroissement plus « artificiellement »:

Exemple 2:

On cherche la limite en 0 de $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$

On peut écrire: $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x} = \dfrac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0}$

Et on sait que (définition du nombre dérivé): $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} = \sin'(0) = \cos(0) = 1$

Donc: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

❑ 4/ Règles de comparaison

Dans ce qui suit, f est une fonction dont on cherche la limite, et u et v sont deux fonctions dont on connaît les limites

Inégalité pour x proche de α	Comportement lorsque x tend vers α	Limite de f lorsque x tend vers α
$f(x) \leq u(x)$	u tend vers $-\infty$	$-\infty$
$f(x) \geq u(x)$	u tend vers $+\infty$	$+\infty$
$\lvert f(x)-l \rvert \leq u(x)$	u tend vers 0	l
$u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ Théorème des gendarmes	u et v tendent vers la même limite l	l
$f(x) \leq u(x)$ ou $f(x) < u(x)$	f et u admettent une limite en α	$\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) \leq \lim\limits_{x \to \alpha} u(x)$

5/ Limite d'une fonction composée

Théorème:

soient *a*,*b* et *l* des réels ou l'infini, *f* et *g* deux fonctions.

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ et $\lim\limits_{y\to b} g(y)=l$ alors $\lim\limits_{x\to a} g\circ f(x)=l$

Exemple :

Soit *h* la fonction définie sur [0, π] par: $h(x)=1+\sqrt{\sin(x)}$

On cherche sa limite en π

h est composée de la fonction f telle que *f*(*x*)=sin(*x*), et de la fonction g telle que $g(y)=1+\sqrt{y}$: *h*=*gof*.

On a: $\lim\limits_{x\to\pi} f(x)=\lim\limits_{x\to\pi}\sin x=0$ et $\lim\limits_{y\to 0} g(y)=\lim\limits_{y\to 0} 1+\sqrt{y}=1$

Donc: $\lim\limits_{x\to\pi} h(x)=\lim\limits_{x\to\pi} g\circ f(x)=1$

6/ Quelques limites à connaître

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

Démonstration:
A vous de jouer
(utiliser la quantité conjuguée ou le nombre dérivé)

D- Limite à droite, limite à gauche

1/ Définitions

On dit que f admet l (fini ou infini) comme limite à gauche en x_0 si la restriction de f à] -∞, x_0] admet l comme limite en x_0.

On note alors : $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \leq x_0}} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{x_0^-} f = l$

On dit que f admet l (fini ou infini) comme limite à droite en x_0 si la restriction de f à [x_0 , -∞ [admet l comme limite en x_0.

On note alors : $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \geq x_0}} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{x_0^+} f = l$

2/ Remarques

1- Si f admet l (fini ou infini) comme limite en x_0, alors f admet l comme limite à gauche et à droite en x_0. On peut écrire:

$$\left[\lim_{x\to x_0} f(x)=l\right] \Rightarrow \left[\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\le x_0}} f(x)=l\right] \wedge \left[\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\ge x_0}} f(x)=l\right]$$

2- Réciproquement, si f admet l comme limite à gauche et à droite en x_0, alors f admet l comme limite en x_0. On peut écrire

$$\left[\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\le x_0}} f(x)=l\right] \wedge \left[\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\ge x_0}} f(x)=l\right] \Rightarrow \left[\lim_{x\to x_0} f(x)=l\right]$$

3- Dans certains calculs de limite, x doit tendre vers x_0 en restant distinct de x_0. Nous noterons alors ces limites :

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)=l \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x\to x_0^-\\ x\ne x_0}} f(x)=l$$

et $\displaystyle\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)=l$ ou $\displaystyle\lim_{\substack{x\to x_0^+\\ x\ne x_0}} f(x)=l$

D- Limite à droite, limite à gauche

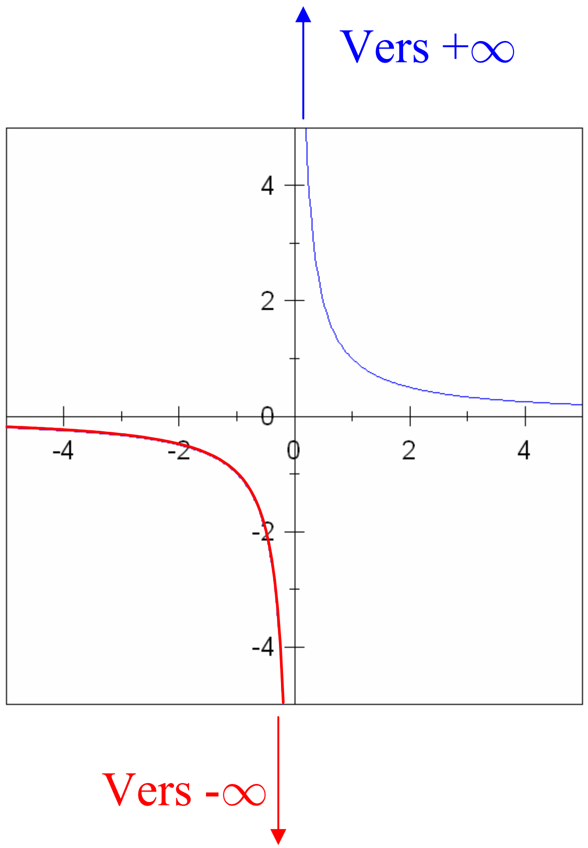
2/ Exemples

Considérons la fonction inverse:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Sa représentation graphique est en bleu :

La représentation graphique de sa restriction à] -∞, 0 [est en rouge :



Et on a:

la limite de f à gauche en 0: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = -\infty$

la limite de f à droite en 0 : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$

E- Comportement asymptotique

1/ Asymptotes horizontales

1.a) Définition:

Soit k un réel

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=k$ (resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=k$),

on dit que la droite D d'équation $y = k$ est une asymptote horizontale à la courbe représentative de f (notée C_f) en $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Cela signifie que C_f se rapproche de plus en plus de D quand x est de plus en plus grand (pour $+\infty$).

1.b) Exemple:

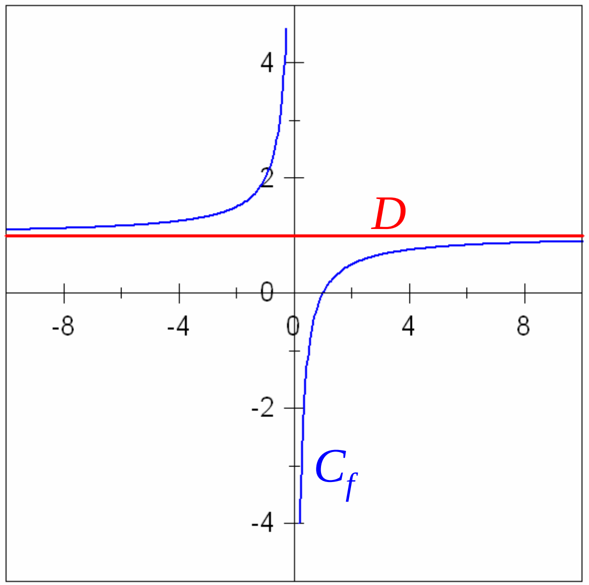
$$f(x)=\frac{x-1}{x}$$

On a: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

Donc la droite D d'équation $y=1$ est asymptote à C_f en $+\infty$

Et: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$

Donc la droite D d'équation $y=1$ est asymptote à C_f en $-\infty$



2/ Asymptotes verticales

2.a) Définition:

Soit k un réel

Si $\lim\limits_{x\to k} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to k} f(x) = -\infty$,

on dit que la droite D d'équation $x = k$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de f (notée C_f).

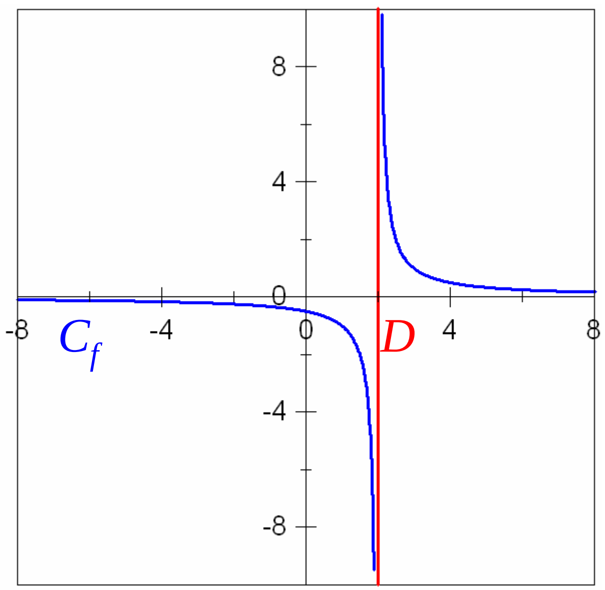
Ceci revient à dire que f admet une limite infinie à droite ou à gauche en k.

2.b) Exemple:

$$f(x) = \frac{1}{x-2}$$

On a: $\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ x<2}} f(x) = -\infty$ et: $\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ x>2}} f(x) = -\infty$

Donc la droite D d'équation $x=2$ est asymptote verticale à C_f.



3/ Asymptotes obliques

3.a) Définition:

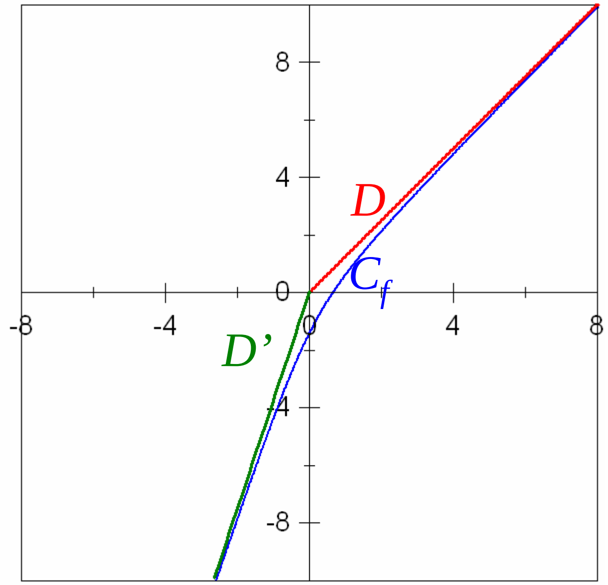
Soient a et b deux réels

Si $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - (ax+b) = 0$,

on dit que la droite D d'équation $y = ax+b$ est une asymptote oblique à C_f en $\pm\infty$.

Ceci revient à dire qu'on peut assimiler le comportement de f à celui de la fonction affine $g(x)=ax+b$ quand x devient très grand (pour $+\infty$).

3.b) Exemple:



$$f(x) = 2x - \sqrt{x^2+2}$$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) - x = 0$ Donc la droite D d'équation $y=x$ est asymptote à C_f en $+\infty$.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) - 3x = 0$ Donc la droite D' d'équation $y=3x$ est asymptote à C_f en $+\infty$.

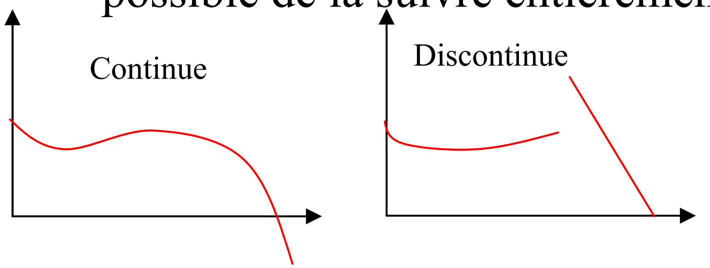
Exercice: démontrer ces résultats…

F- Continuité

1/ Généralités

1.a) Idée:

Une fonction est continue si sa représentation graphique est continue: il est possible de la suivre entièrement « sans lever le crayon ».



1.b) Définition:

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant le point a

1) f est continue en a si f admet une limite finie en a. Dans ce cas, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

2) f est continue sur I si f est continue en tout point de I.

1.c) Théorème (admis):

Si une fonction est dérivable sur un intervalle I, alors elle est continue sur I.

2/ Prolongement par continuité

2.a) Exemple:

La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$, mais pas en 0 puisque elle n'est pas définie en 0.

Mais on sait que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$

On peut donc définir une nouvelle fonction, $\tilde{f}$, qui coïncide avec *f* sur $\mathbb{R}^*$ et qui vaut 1 en 0. Cette fonction est appelée « prolongement de *f* par continuité » (ou « prolongement continu de *f* »).

2.b) Définition:

Soit *f* une fonction continue sur un intervalle I contenant *a*, sauf en *a*, et vérifiant

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = l \ (l \in \mathbb{R})$

alors la fonction : $\tilde{f} : \begin{cases} x \mapsto f(x) & si \quad x \neq a \\ a \mapsto \quad l & \end{cases}$ qui est définie en *a* et continue en *a*,

est le « prolongement continu » (ou « prolongement par continuité ») de *f* en *a*.

3/ Continuité et bijection

1) Théorème

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I. Alors:
1) f (I) est un intervalle
2) Pour tout m de f (I), l'équation $f(x) = m$ admet une seule solution dans I

Le deuxième point est équivalent à « f est une bijection de I sur f (I) »

2) Commentaires:

L'intérêt principal de ce théorème est de permettre parfois la résolution approchée d'équation du type $f(x) = 0$. Il permet:

- de justifier l'existence de solutions (c.a.d. prouver que des solutions existent)
- de localiser ces solutions et en trouver des valeurs approchées (à l'aide d'algorithmes de calcul, comme la dichotomie, le balayage, l'interpolation…)